ГБПОУ МО “Училище (техникум) олимпийского резерва №3”

План –конспект урока

Тема: **Решение логарифмических неравенств.**
Метод рационализации.

Подготовила: Афанесян Сильва Рафиковна
Преподаватель математики.

Химки 2022 г.

Тема урока:

Решение логарифмических неравенств. Метод рационализации.

Цель урока:

- знакомство с новым методом решения логарифмических неравенств;
- теоретическое обоснование метода;
- отработка навыков решения неравенств
- развитие умений нахождения рационального способа решения.

Дидактические задачи этапов урока

Этапы урока	Дидактические задачи
Организационный момент	Обеспечение комфортных условий для работы на уроке: создание благоприятной психологической атмосферы, настрой на совместную работу .
Актуализация опорных знаний	Активизация соответствующих мыслительных операций и познавательных процессов.
Постановка учебных целей их решение	Обеспечение мотивации для принятия обучающимися цели учебно-познавательной деятельности.
Формулировка темы, целей урока	Создание условий для формулировки цели урока и постановки учебных задач.
Повторение материала	Обеспечение восприятия, осмысления и запоминания знаний, связей и отношений в объекте изучения.
Рефлексия учебной деятельности	Анализ и оценка успешности достижения цели; выявление качества и уровня овладения знаниями.
Итог урока и домашнее задание	Установление правильности и осознанности усвоения учебного материала, выявление пробелов, неверных представлений, их коррекция.

Определение логарифма

Логарифм с основанием *a* – это функция $y(x) = \log_a x$**,** обратная к показательной функции с основанием *a:* $x(y) = a^y$**.**

В дальнейшем будем считать, что **основание логарифма *a*** положительное, не равное единице число: .

Десятичный логарифм – это логарифм по основанию числа 10**:** $\lg x \equiv \log_{10} x$**.**

Натуральный логарифм – это логарифм по основанию числа *e***:** $\ln x \equiv \log_e x$**.**

2,718281828459045...**;**
.

График логарифма

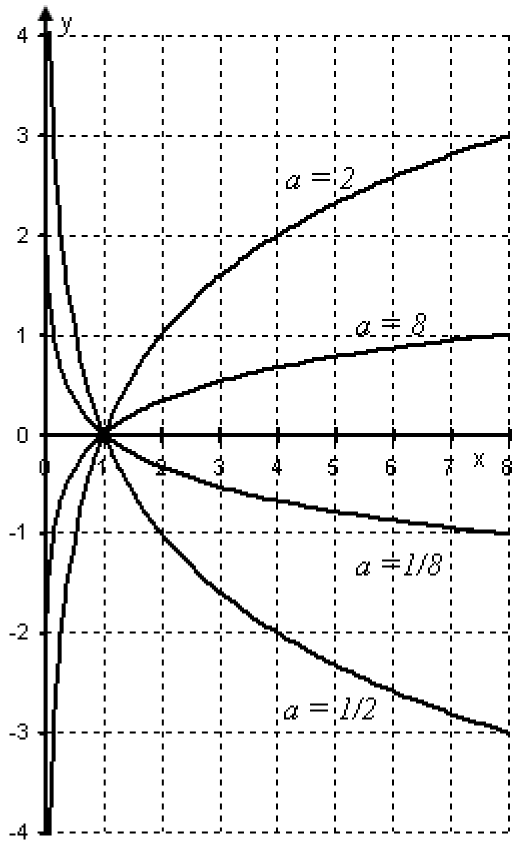


График функции $y = \log_a x$

График логарифма получается из графика показательной функции зеркальным отражением относительно прямой $y = x$**.** На чертеже изображены графики функции $y(x) = log_a x$ для четырех значений основания логарифма: $a = 2$**,**$a = 8$**,** $a = 1/2$ и $a = 1/8$**.** На графике видно, что при $a > 1$ логарифм монотонно возрастает. С увеличением *x* рост существенно замедляется. При $0 < a < 1$ логарифм монотонно убывает.

Метод рационализации — это способ решения некоторых неравенств, который позволяет довольно сильно упростить решение и вычисления.

Логарифмические уравнения и неравенства

При условии $f(x)>0,\ g(x)>0,\ a(x)>0,\ a(x)\neq 1,\ h(x)>0,\ h(x)\neq 1,\ p(x)>0,\ p(x)\neq 1$ ***выполняются следующие переходы:***		
1	$\log_a f(x)=\log_a g(x)$	$f(x)=g(x)$
2	$\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)$	$f(x)=g(x)$
3	$\log_a f(x)>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$	$(a-1)(f(x)-1)>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$
4	$\log_{a(x)} f(x)>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$	$(a(x)-1)(f(x)-1)>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$
5	$\log_a f(x)>\log_a g(x)$ ***или*** $(<;\ \geq;\ \leq)$	$(a-1)(f(x)-g(x))>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$
6	$\log_{a(x)} f(x)>\log_{a(x)} g(x)$ ***или*** $(<;\ \geq;\ \leq)$	$(a(x)-1)(f(x)-g(x))>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$
7	$\log_{h(x)} a(x)-\log_{p(x)} a(x)>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$	$(a(x)-1)(h(x)-1)(p(x)-1)(p(x)-h(x))>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$
8	$\log_{h(x)} f(x)\cdot\log_{p(x)} g(x)>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$	$\dfrac{(f(x)-1)(g(x)-1)}{(h(x)-1)(p(x)-1)}>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$
9	$\dfrac{\log_{h(x)} f(x)}{\log_{p(x)} g(x)}>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$	$\dfrac{(f(x)-1)}{(g(x)-1)(h(x)-1)(p(x)-1)}>0$ ***или*** $(<0;\ \geq 0;\ \leq 0)$

Рассмотрим примеры на применение метода рационализации:

Пример 1. Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3) < 0 \\ 2x+3 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1)(x-3) < 0 \\ x > -1{,}5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-1{,}5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.

Пример 2. Решите неравенство

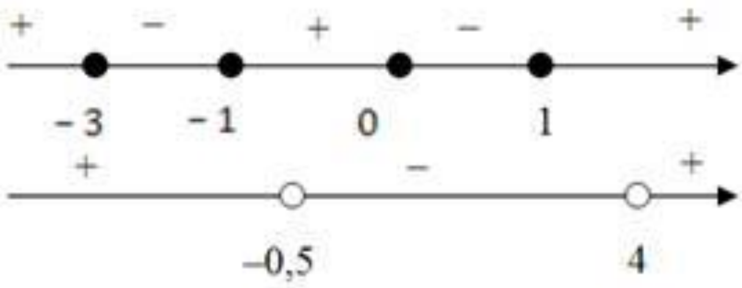
$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) \leq 2.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) - \log_{|x+2|}(x+2)^2 \leq 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (|x+2|-1)(4+7x-2x^2-x^2-4x-4) \leq 0 \\ 4+7x-2x^2 > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((x+2)^2-1)(-3x^2+3x) \leq 0 \\ (x+0{,}5)(x-4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x+3)(x-1) \geq 0 \\ (x+0{,}5)(x-4) < 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$



Ответ: $(-0{,}5;0]\cup[1;4)$

Пример 3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\geq 0.$$

Решение. Заменим данное неравенство равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\log_x\sqrt{3-x}-1\right) \geq 0 \\ \log_x\sqrt{3-x} > 0 \\ 3-x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1)\left(\sqrt{3-x}-x\right) \geq 0 \\ (x-1)\left(\sqrt{3-x}-1\right) > 0 \\ x < 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3-x-x^2) \le 0 \\ (x-1)(3-x-1) > 0 \\ x < 3 \\ x > 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) \ge 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}-1}{2} \le x < 2.$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$.

Пример №4

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)-\log_{2x^2-5x+3}(3-x)\geq 0$$

и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases}(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(2-x)(-10x^2+36x-32)\geq 0\\ 12x^2-41x+35>0\\ 2x^2-5x+3>0\\ 12x^2-41x+34\neq 0\\ 2x^2-5x+2\neq 0\\ 3-x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-2)^4\left(x-\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{17}{12}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq 0\\ \left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right)>0\\ (x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)>0\\ \left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2)\neq 0\\ (x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\neq 0\\ x<3\end{cases}$$

Для решения первых трех неравенств системы используем метод интервалов.

Самостоятельно рассмотрите рисунки и выберите общую часть для решения системы.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4};2\right)\cup(2;3)$.

Рассмотрите самостоятельно решение следующих неравенств.

Идет работа в группах.   1 группа выполняет задания 1-4, вторая задания 5-8.
Группы составляются произвольным образом. Выполняются задания на листках, сдаются на проверку. (один лист от группы)

Упражнения

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\geq\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right).$$

Ответ: $\{1\}\cup(1{,}5;3)$.

2. Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\leq 0.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

3. Решите неравенство

$$\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right)<1.$$

Ответ: $(\log_3 10;+\infty)$.

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)}\leq 0.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right]$.

5. Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3(x+7)} \le 0.$$

Ответ: $(-7;6)\cup[2;2{,}5)\cup(4;4{,}5]$

6. (2010) Решите неравенство

$$\log_{0,1}\left(x^2+x-2\right) > \log_{0,1}(x+3).$$

Ответ: $\left(-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right)$.

7. Решите неравенство

$$\frac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)} < 0.$$

Ответ:

$(-\infty;-2)\cup\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

8. Решите неравенство

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \le 0.$$

Ответ: $(-2;-1]\cup(1;2)$.

Домашнее задание: соседний вариант.

Использованная литература:

Учебник Ш.А.Алимов «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» .

Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.И. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пос.– Изд. 3-е. – М.: Физматлит, 2020.

Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – Ростқнига, 2021.

Интернет ресурсы: Российское образование. Федеральный портал

http://alexlarin.net/

https://math-ege.sdamgia.ru/

http://www.fipi.ru/